

УДК 621.317*В.В Куліченко, студент гр. ПА-81, к.т.н., доц. Шумков Ю.С.*

КПІ ім. Ігоря Сікорського

**ДИСКРЕТНИЙ СИНТЕЗ СИГНАЛІВ ЗА МЕТОДОМ
ЕКСПОНЕНЦІАЛЬНИХ СПЛАЙНІВ**

Анотація. Для одержання гладких залежностей з сигналу, який сформований кусковими функціями, застосовується аналогова фільтрація. Якщо через обмежену кількість ділянок дискретизації умови теореми Котельникова не виконуються, дискретний синтез сигналів стає апроксимаційним завданням, що розв'язується в часовій області. Розглянуто реалізацію методу інтерполяції експоненціальними сплайнами третього порядку, що може бути використано під час дискретного синтезу випробувальних сигналів спеціальної форми.

Ключові слова: дискретний синтез, випробувальний сигнал, експоненціальний сплайн.

ВСТУП

Для одержання гладких залежностей із сигналу, який сформовано кусковими функціями, застосовується аналогова фільтрація. Найчастіше це фільтрація деякого кусково-ступінчастого сигналу, що сформовано на виході ЦАП за дискретними відліками (миттєвими значеннями у моменти дискретизації) неперервного сигналу, який потрібно відтворити. Якщо умови теореми Котельникова не виконуються, то відбувається накладення зсунутих через дискретизацію спектрів неперервного сигналу [1]. При цьому точне відтворення неперервного сигналу за його дискретними відліками шляхом фільтрування високочастотних спектральних складових, які виникають через дискретизацію, не можливо. Так, наприклад, фільтрація кусково-ступінчастого сигналу призводить до деяким згладженим кусково-експоненціальним функціям. Задача дискретного синтезу стає апроксимаційною та розв'язується у часовій області.

Для одержання гладких залежностей під час дискретного синтезу доцільним є використання математичного апарату сплайн-функцій [2]. При цьому для одержання сигналів, що "вписуються" на окремих ділянках в залежності, які відтворюються, доцільним є здійснювати синтез на основі моделей сплайнів, адекватних реальним сигналам, що генеруються або досліджуються. При цьому експоненціальні сплайнові моделі є оптимальними [3].

МЕТА РОБОТИ

Метою статті є аналіз реалізації методу інтерполяції під час дискретного синтезу сигналів на прикладі експоненціальних сплайнів третього порядку, що може бути використано для формування випробувальних сигналів спеціальної форми.

МАТЕРІАЛИ І РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕННЯ

Суть методу дискретного синтезу експоненціальними сплайнами полягає в поданні сигналів, що формуються, у вигляді суми зміщених у часі фінітних базисних експоненціальних сплайнів зі своїми ваговими коефіцієнтами.

Експоненціальна сплайн-функція (ЕСФ) $sf_{Gm}(\bar{t})$ порядку m

$$sf_{G_m}(\bar{t}) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} f[n+1-i] \cdot G_m(i+\varepsilon) = \quad (1)$$

$$= A^*(a)[0 + f[n+1] \cdot b_0(\varepsilon) + f[n] \cdot b_1(\varepsilon) + f[n-1] \cdot b_2(\varepsilon) + \dots + f[1] \cdot b_{m-1}(\varepsilon) + 0]$$

є дискретною згорткою решітчастої функції $f[n]$ з імпульсною функцією $G_m(\bar{t}) = G_m(n+\varepsilon)$ – фінітний експоненціальний сплайн, який є імпульсною перехідною характеристикою деякого сплайн-апроксимуючого фільтру (САФ), де $\bar{t} = n + \varepsilon$ – відносний час, пов'язаний з дійсним часом $\bar{t} = t/h$; h – рівномірний інтервал дискретизації; $n = 0, 1, 2, \dots$; $\varepsilon \in [0, 1]$; $\{b_i(\varepsilon)\}_{i=0}^{m-1}$ – кускові функції, що утворюють сплайн на кожній ділянці; m – порядок диференціального рівняння, з розв'язків якого утворюється сплайн; $A^*(a)$ – нормуючий множник; $f[n]$ – дискретні відліки, які подаються на вхід САФ.

Аналіз математичної моделі формування електричних випробувальних сигналів на прикладі сплайнів третього порядку наведено у роботі [4]. Наведений в роботі приклад також ілюструє метод одержання різноманітних моделей експоненціальних сплайнів за моделлю передатної функції лінійного електричного кола із зосередженими параметрами та формування на їх основі сигналів спеціальної форми. Нижче наведено фінітний базисний експоненціальний сплайн $G_{3,1}(\bar{t})$ та ЕСФ третього порядку $sf_{G_{3,1}}(\bar{t})$, яка одержана за виразом (1):

$$G_{3,1}(\bar{t}) = \begin{cases} \frac{1}{-1 + \alpha + e^{-\alpha}} [-1 + \alpha\varepsilon + e^{-\alpha\varepsilon}], & \bar{t} \in [0, 1]; \\ \frac{1}{-1 + \alpha + e^{-\alpha}} [1 + \alpha + e^{-\alpha} - (1 + e^{-\alpha}) \cdot \alpha\varepsilon - 2e^{-\alpha\varepsilon}], & \bar{t} \in [1, 2]; \\ \frac{1}{-1 + \alpha + e^{-\alpha}} e^{-\alpha} [-1 + \alpha(\varepsilon - 1) + e^{-\alpha(\varepsilon-1)}], & \bar{t} \in [2, 3]; \\ 0, & \bar{t} < 0, \bar{t} > 3. \end{cases} \quad (2)$$

$$sf_{G_{3,1}}(\bar{t}) = \frac{1}{-1 + \alpha + e^{-\alpha}} \left\{ f[n+1] \cdot (-1 + \alpha\varepsilon + e^{-\alpha\varepsilon}) + \right. \\ \left. + f[n] \cdot [1 + \alpha + e^{-\alpha} - (1 + e^{-\alpha}) \cdot \alpha\varepsilon - 2e^{-\alpha\varepsilon}] + f[n-1] e^{-\alpha} [\alpha(\varepsilon - 1) - 1 + e^{-\alpha(\varepsilon-1)}] \right\}, \quad (3)$$

де відліки $f[n]$ є коефіцієнтами сплайн-функції.

Відомі степеневі B -сплайни $B_1(\bar{t})$ і $B_2(\bar{t})$ можуть бути одержані з $G_{3,1}(\bar{t})$ як границя відповідно при $\alpha \rightarrow \infty$ і $\alpha \rightarrow 0$. Параметр α дозволяє змінити форму фінітного сплайна $G_{3,1}(\bar{t})$, що дає змогу адаптуватися під модель залежності, яка відтворюється. Для кускової функції $sf_{G_{3,1}}(\bar{t})$ виконується умова неперервності як для самої функції так і для її першої похідної у вузлах.

Але значення сплайн-функції $sf_{G_{3,1}}(\bar{t})$ у вузлах та формованого сигналу $S_0(\bar{t})$, якщо сплайн задається дискретними відліками $f[n] = s[n]$, в моменти $\bar{t} = n$ не збігаються. Тобто фінітний експоненціальний сплайн третього порядку

$G_{3,1}(\bar{t})$ є апроксимуючий, що ускладнює задачу дискретного синтезу. А саме, потребує попереднього визначення значень дискретних відліків $f[n]$, що подаються на вхід САФ.

Така задача в загальному випадку потребує розв'язку систем лінійних рівнянь зі стрічковими матрицями [2]. Але у випадку інтерполяції ці значення досить легко розрахувати, не складаючи систему рівнянь. Розглянемо випадок інтерполяції сплайнами $sf_{G_{3,1}}(\bar{t})$. На рис. 1 наведено приклад формування деякого випробувального сигналу спеціальної форми $S_0(\bar{t})$ фінітними сплайнами $G_{3,1}(\bar{t})$. Такий сигнал може бути використаний, наприклад, під час контролю параметрів електричного кола третього порядку за методом нулів і полюсів [3].

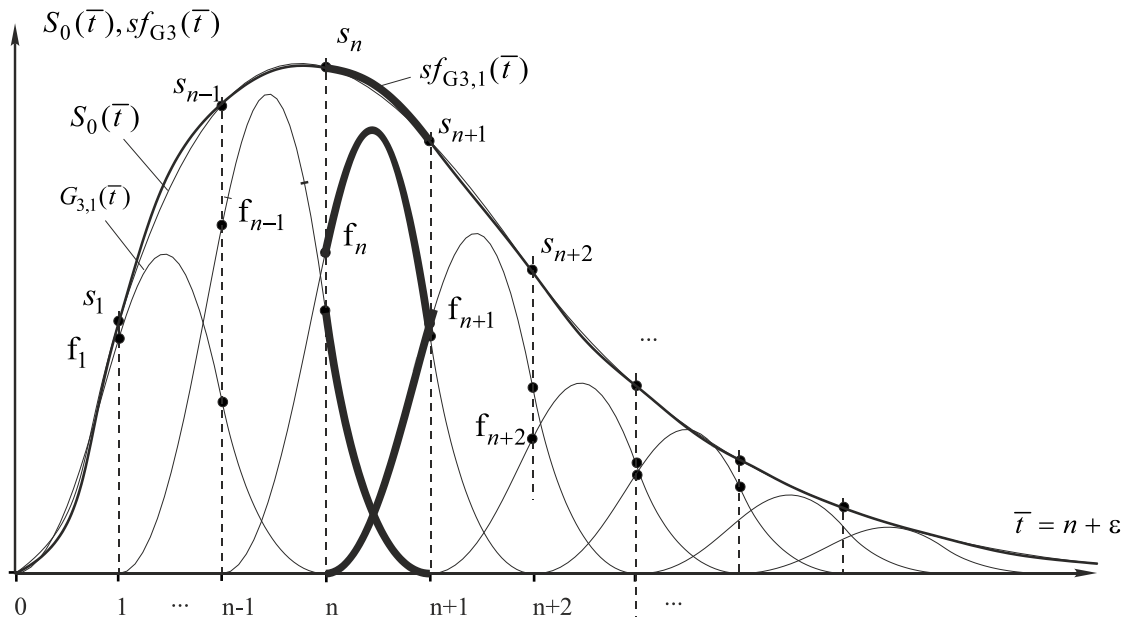


Рисунок 1. Формування сигналів сплайнами $G_{3,1}(\bar{t})$

Розглянемо умови інтерполювання у вузлах. Так для n -й ділянки при $\epsilon = 1$ маємо:

$$s[n+1] = sf_{G_{3,1}}(\bar{t})_{/\epsilon=1}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Враховуючи те, що (див. вираз $sf_{G_{3,1}}(\bar{t})$)

$$f[n-1]e^{-\alpha} \left[\alpha(\epsilon-1) - 1 + e^{-\alpha(\epsilon-1)} \right]_{/\epsilon=1} = 0,$$

одержимо рекурентне співвідношення:

$$s[n+1] = f[n+1] - \left[\frac{1 - e^{-\alpha} - \alpha e^{-\alpha}}{1 - \alpha - e^{-\alpha}} \right] \cdot f[n] = f[n+1] - A \cdot f[n], \quad (4)$$

де $A = \left[\frac{1 - e^{-\alpha} - \alpha e^{-\alpha}}{1 - \alpha - e^{-\alpha}} \right]$. Тобто, якщо задати початкові значення $f[0] = 0$, $f[1] = s[1]$, то інші значення $f[n]$ розраховуються за формулами $f[2] = s[2] + A \cdot f[1]$, $f[3] = s[3] + A \cdot f[2]$, ..., $f[n+1] = s[n+1] + A \cdot f[n]$.

Реалізація сплайн-інтерполяції може бути досягнута шляхом попереднього включення цифрового фільтру (рис. 2), який реалізує цей алгоритм.

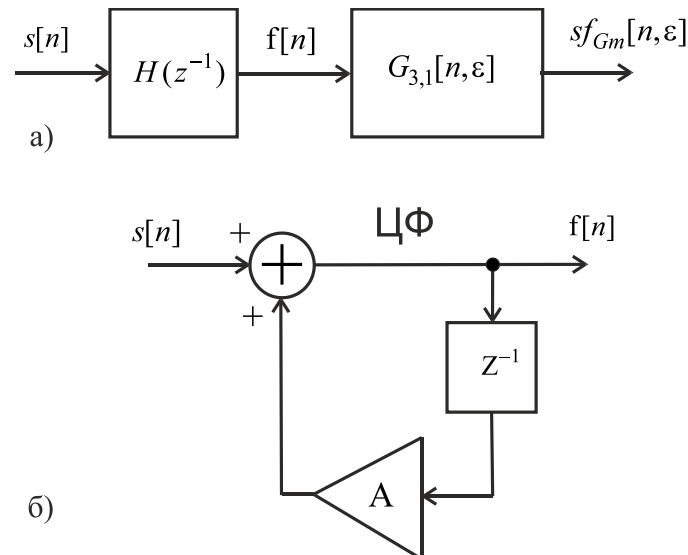


Рисунок 2. Інтерполювання сигналу $s(\bar{t})$ сплайнами $G_{3,1}(\bar{t})$:

а) – реалізація схеми інтерполювання; б) – структура цифрового фільтру у випадку інтерполяції сплайнами $G_{3,1}(t)$

Реалізація методу інтерполяції за допомогою експоненціальних сплайнів четвертого і вище порядків потребує синтезу цифрового фільтру з більш складною структурою.

ВИСНОВКИ

Наведений приклад ілюструє реалізацію методу інтерполяції випробувальних сигналів спеціальної форми експоненціальними сплайнами третього порядку та може бути використаний для інших моделей сплайнів.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

- [1] Я.З. Цыпкин, *Теория линейных импульсных систем*, М.: Физматгиз, 1963, 968 с.
- [2] Brian J. McCartin, «Theory of Exponential Splines», *Journal of Approximation Theory*, vol. 66, pp. 1-23, 1991.
- [3] Yu. Shumkov, «Exponential splines in electric circuits' parameters measuring», in *Proc. of the International Conf. Actual problems of Measuring Technique "Measurement-98"*, Kyiv, Ukraine, 1998, pp. 250-253.
- [4] В.В. Куліченко, та Ю.С. Шумков, «Аналіз математичної моделі формування сигналів експоненціальними сплайнами», на *XV Всеукр. наук.-практ. конф. студентів, аспірантів та молодих вчених "ЕФЕКТИВНІСТЬ ІНЖЕНЕРНИХ РІШЕНЬ У ПРИЛАДОБУДУВАННІ"*, Київ, 2019, с. 506-509.

Наук. керівник – к.т.н., доц. Шумков Ю.С.